№1.

а) Пусть, без ограничения общности в обществ. опт. (О.О.) $x_1 \geq x_2$

Заметим, что если 2й агент посещает занятия отдельно от 1-го, то ситуацию можно улучшить, заставив его посещать совместно с первым =>

=> в О.О сумма полезностей имеет вид:

$x_1+\alpha \underbrace{\min(x_1,x_2)}_{=x_2}+x_2+\alpha\min(x_1,x_1)-c(x_1)-c(x_2)$.

б) Если $x_1 > x_2$, возьмем $x_1^0 = x_2^0 = \frac{x_1+x_2}{2}$, и получим улучшение, т.к. $\min(x_1^0, x_2^0) = \frac{x_1+x_2}{2} > x_2 = \min(x_1, x_2)$

$c(x_1)+c(x_2) \geq c(x_1^0)+c(x_2^0) = 2c\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

(т.к. $c(\cdot)$ – выпукла)

Итак в О.О. $x_1 = x_2$, студенты посещают лекции совместно

$\Rightarrow 2(x_i+\alpha x_i - c(x_i)) \to \max\limits_{x_i} \Rightarrow \begin{cases} c'(x_i) = 1+\alpha; & x_i \leq 1 \\ x_i = 1, & \text{если } c'(1) < 1+\alpha. \end{cases}$

в) $x_1 + \alpha x_2 x_1 - c(x_1) \to \max\limits_{x_1} \Rightarrow \begin{cases} c'(x_1) = 1+\alpha x_2; & x_1 \leq 1 \\ x_1 = 1, & \text{если } c'(1) < 1+\alpha x_2 \end{cases}$

Пусть в р-ии $x_1 > x_2$;

если решение внутреннее, то имеем $1+\alpha x_2 = c'(x_1)$

противоречие. $1+\alpha x_1 = c'(x_2)$

Если $x_1 = 1 \Rightarrow 1+\alpha x_1 > \underbrace{1+\alpha x_2}_{=c'(x_2)} > c'(1) \Rightarrow$ противоречие, т.к. $x_2 < 1$.
($x_2 < x_1$)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ и решение $\begin{cases} c'(x) = 1+\alpha x, & x \leq 1 \\ x = 1, & c'(1) < 1+\alpha \end{cases}$

с) Если $1+\alpha > c'(1) \Rightarrow$ обязательное посещение является О.О.

Но равновес. состояние может и не быть О.О.

Пример: $c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow c' = x^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{4}$

внутр. равновесие $\{x_i^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{4}x_i \Rightarrow x_i = \sqrt{\frac{1}{2}}\}$ – не О.О.?!

"краев." равновесие $\{x_i = 1\}$

=> лучше ввести обяз. посещение

Если $1+\alpha < c(1) \Rightarrow$ при обязат. посещении выигрыш студентов <0

=> лучше не вводить, т.к. тогда у них есть опция $x_i = 0$, а выигрыш $= 0$