

## Markovitz Theory: Problem Set.

Менеджер взаимного фонда рассматривает возможности вложения средств в корпоративные облигации  $X_1$  и акции  $X_2$  (причем разрешены лишь длинные позиции по этим активам). По оценкам аналитиков, ожидаемые доходности, стандартные отклонения доходностей и коэффициент корреляции для облигаций и акций равны соответственно<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[r_1] &= 30\%, & \sigma_1 &= 35\%, \\ \mathbb{E}[r_2] &= 40\%, & \sigma_2 &= 71\%, \\ \rho_{1,2} &= -0.5.\end{aligned}$$

1. Постройте совокупность инвестиционных возможностей на плоскости  $Q = (\mathbb{E}[r], \sigma)$ ; найдите распределение активов (т.е., доли  $w_1$  и  $w_2$ ), обеспечивающее минимальный риск полного портфеля; постройте эффективную границу допустимого множества.
2. При каких значениях коэффициента корреляции возможно составить портфель с уровнем риском, меньшим, чем уровни риска *каждого* из активов?
3. Руководство фонда одобрило использование в конечном портфеле краткосрочных казначейских векселей  $X_{rf}$ , имеющих доходность  $r_{rf} = 10\%$ . Найдите наилучшее сочетание  $(w_1^*, w_2^*)$  рискованных активов для объединения в полном портфеле с безрисковыми векселями. Для портфеля  $(w_1^*, w_2^*)$  найдите ожидаемую доходность  $E^*$ , стандартное отклонение  $\sigma^*$  и постройте *CAL*, где безрисковой компонентой являются казначейские векселя. Для построенного отрезка *CAL*, вычислите *reward-to-variability ratio*. Укажите, как следует переопределить эффективную границу.
4. Помимо использования казначейских векселей, руководство фонда разрешило открытие коротких позиций по безрисковым инструментам  $X_b$  денежного рынка для увеличения объема рискованных активов. Соответствующая "плата за кредит" составляет  $r_b = 15\%$ , и при этом разрешено увеличение объема рискованных активов до 150% относительно объема, доступного без привлечения кредита. Постройте отрезок *CAL*, отвечающий стратегии открытия коротких безрисковых позиций (для этого необходимо найти оптимальный рискованный портфель). Переопределите эффективную границу (также учитывается открытие длинных позиций по казначейским векселям). Возможно ли добиться улучшения ожидаемой доходности портфеля? Насколько?
- 5\*. Допустим, функция полезности одного из клиентов фонда равна

$$U(E, \sigma) = E - \frac{\theta}{2} \sigma^2.$$

При каких значениях  $\theta$  (несклонность клиента к риску) менеджер фонда посоветует:

- комбинировать акции и облигации с казначейскими векселями
- использовать только акции и облигации
- открывать короткие позиции для покупки большего объема акций и облигаций

Если возможно, приведите точные веса компонент полного портфеля для трех указанных случаев.

---

<sup>1</sup>Для удобства вычислений предлагается положить  $\sigma_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.35$ ,  $\sigma_2 = \frac{\sqrt{8}}{4} \approx 0.71$ .