Российская Экономическая Школа

Курс: Теория Вероятностей и Математическая Статистика

Домашнее задание 2

Решение

Задача 1. Бросают три игральных кубика. Какова вероятность того, что хотя бы на одном из них выпадет одно очко, если на всех трех кубиках выпали разные грани?

Решение. Ведем следующие события:

A= «хотя бы на одном из кубиков выпало одно очко»; B= «на всех кубиках выпали разные грани».

Требуется найти вероятность $\mathrm{P[A \mid B]} = \dfrac{\mathrm{P[AB]}}{\mathrm{P[B]}}$.

Вероятность P[AB] равна отношению числа событий, удовлетворяющих условию выпадения разных граней на кубиках и, одновременно, выпадения одного очка на одном из кубиков, к их общему числу. Число всех элементарных событий равно $6^3 = 216$. А вероятность P[B] равна отношению числа событий, удовлетворяющих условию выпадения разных граней на кубиках, к их общему числу. Поэтому искомая вероятность равна отношению числа событий, при которых реализуется событие AB, к числу событий, которые удовлетворяют условию B.

Определим сначала число событий, соответствующих выпадению разных граней. Оно равно $3!C_6^3 = 120$ (равносильно схеме вытягивания 3-х шаров из урны с 6-ю различными шарами, причем учитывается количество возможных перестановок среди вытянутых шаров). Для того, что бы получить число событий, соответствующих выпадению разных граней и одного очка, надо от найденного числа отнять число событий, соответствующих выпадению разных граней, при чем ни на одной из них не выпало одного очка. Это число равно $3!C_5^3$ (аналогично, равносильно схеме вытягивания 3-х шаров из урны с 5-ю различными, причем учитывается количество возможных перестановок среди вытянутых шаров (3!)). Таким образом число событий благоприятных для события AB равно $3!C_6^3 - 3!C_5^3 = 120 - 60 = 60$. Таким образом, искомая вероятность равна $\dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$.

Задача 2. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) равномерно распределена в квадрате $K = \{(u,v): 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1\}$. Пусть η – число вещественных корней многочлена $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \xi_1^2 x + \xi_2$. Найти вероятности $p_1 = P\{\eta = 1\}$, $p_3 = P\{\eta = 3\}$.

Решение. Обозначим $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \xi_1^2 x$. Элементарный анализ показывает, что функция $g(x)$ имеет график, представленный на Рис. 1. Поскольку $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = -\xi_2$, то отсюда следует, что $\eta = 1 \Leftrightarrow \xi_2 > \frac{2}{3}\xi_1^3$, $\eta = 3 \Leftrightarrow \xi_2 < \frac{2}{3}\xi_1^3$, а событие $\{\eta = 2\}$ имеет нулевую вероятность (см. Рис. 2). Интегрируя, получаем

$$p_1 = \frac{5}{6},\ p_3 = \frac{1}{6}.$$

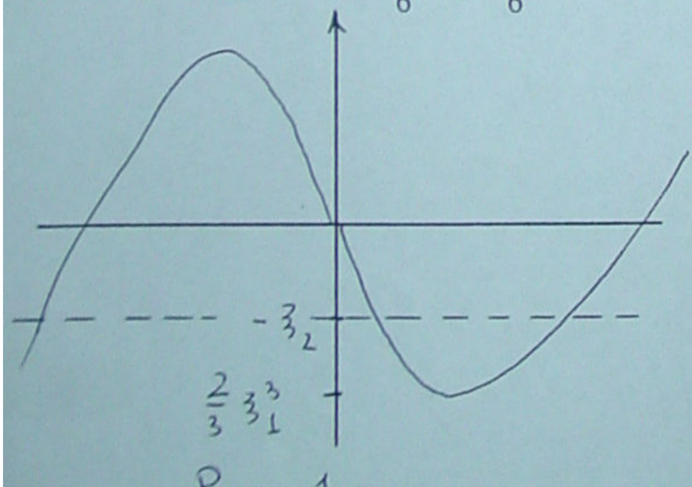

Рис. 1

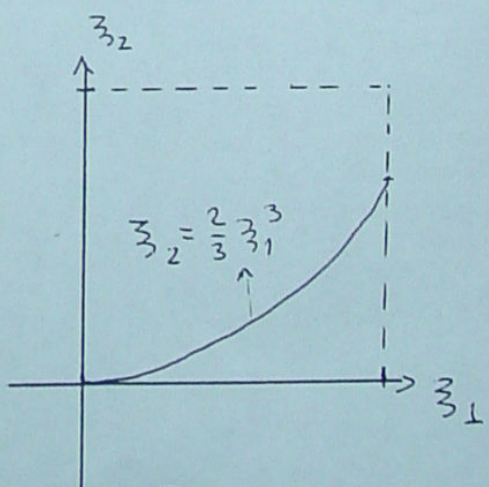

Рис. 2