Микроэкономика-3: дополнительные материалы к лекциям

А. Тонис, 2006г.

Непрерывные предпочтения

Пусть на множестве потребительских наборов $X = \mathbb{R}^L_+$ заданы рациональные предпочтения $\succsim$. Рассмотрим следующие два определения непрерывности предпочтений:

Определение 1. *Предпочтения $\succsim$ называются непрерывными, если для любого набора $x \in X$ его верхний контур $\{y \in X : y \succsim x\}$ и нижний контур $\{y \in X : x \succsim y\}$ являются замкнутыми множествами.*

Определение 2. *Предпочтения $\succsim$ называются непрерывными, если их график $\{(x, y) \in X \times X : x \succsim y\}$ является замкнутым множеством.*

Определение 2 означает, что отношение предпочтения должно сохраняться при предельном переходе: если последовательность $\{(x^{(n)}, y^{(n)})\}$, сходится к (x, y) и $x^{(n)} \succsim y^{(n)}$, то $x \succsim y$.

Определение 2 кажется более сильным, чем определение 1, поскольку если график предпочтений замкнут, то замкнуто и множество точек графика со второй координатой, равной y, которое, по сути, и есть верхний контур для y (и аналогично для нижнего контура). Но на самом деле определения равносильны.

Утверждение. *Определения непрерывности 1 и 2 эквивалентны.*

Доказательство. Уже показано, что определение 1 следует из определения 2 (см. выше). Докажем теперь, что из определения 1 следует определение 2.

Предположим, что это не так, т. е. выполнено определение 1, есть последовательность $\{(x^{(n)}, y^{(n)})\}$, сходящаяся к (x, y) и такая, что $x^{(n)} \succsim y^{(n)}$ для всех n, но при этом $y \succ x$.

Поскольку нижний контур точки x замкнут (в силу определения 1), то *строгий верхний контур* точки x, который можно определить как $\{z \in X : z \succ x\}$, является открытым множеством (как дополнение к замкнутому). Поскольку y принадлежит этому открытому множеству, то и $y^{(n)}$ принадлежат ему при достаточно больших n, т. е. $y^{(n)} \succ x$. Аналогично получаем, что $y \succ x^{(n)}$ для достаточно больших n.

Итак, из вышесказанного можно сделать вывод, что для некоторого (фиксированного) k выполнены "неравенства" $y \succ x^{(k)}$ и $y^{(k)} \succ x$. Проведя рассуждения, как в предыдущем абзаце, но с заменой x на $x^{(k)}$, получаем, что для достаточно больших n выполнено отношение $y^{(n)} \succ x^{(k)}$. Аналогично, $y^{(k)} \succ x^{(n)}$. Это противоречит нашему предположению, что $x^{(k)} \succsim y^{(k)}$ и $x^{(n)} \succsim y^{(n)}$ (получилась зацикливающаяся цепочка предпочтений, что противоречит требованию рациональности). Следовательно, предположение $y \succ x$ неверно и утверждение доказано. $\square$