

Непрерывность вальрасовского спроса

Пусть на множестве потребительских наборов \mathbb{R}_+^L заданы рациональные и непрерывные предпочтения \succsim . Рассматривается задача выбора потребителем набора потребляемых благ на бюджетном множестве

$$B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}_+^L : px \leq w\},$$

где $p \in \mathbb{R}_+^L$ — вектор цен, а $w \in \mathbb{R}_+$ — доход (договоримся, что p — это вектор-строка, а x — столбец). Выбор должен быть оптимальным с точки зрения предпочтений \succsim . Таким образом, получаем отображение вальрасовского спроса (вообще говоря, многозначное²): параметры бюджетного множества (p, w) отображаются в множество оптимального выбора

$$x(p, w) = \{x \in B_{p,w} : \forall y \in B_{p,w} \quad x \succsim y\}.$$

Важный факт состоит в том, что это отображение обладает некоторыми свойствами непрерывности (более точную формулировку см. ниже), что гарантирует существование равновесного состояния в широком классе моделей общего равновесия³.

“Непрерывность” спроса следует из общей “теоремы об Argmax”, которая ценна сама по себе. Прежде, чем ее сформулировать, надо дать несколько определений, касающихся различных концепций непрерывности многозначных отображений.

Будем исходить из обычной евклидовой метрики в пространстве \mathbb{R}^L , задающей для каждой пары точек $x, y \in \mathbb{R}^L$ расстояние между ними: $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^L (x_i - y_i)^2}$.

Определение 1. Пусть $x \in \mathbb{R}^L$ — точка, а $Y \subset \mathbb{R}^L$ — компактное (замкнутое и ограниченное) множество. Тогда расстояние от x до Y определяется следующим образом:

$$\rho(x, Y) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in Y\}.$$

Заметим, что поскольку Y — компакт и функция $\rho(x, y)$ непрерывна по y , то минимум расстояния достигается в некоторой конкретной точке.

Теперь можно пытаться измерять расстояния между множествами:

Определение 2. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^L$ — компактные множества. Тогда (асимметричное) расстояние от X до Y определяется следующим образом:

$$\tilde{\rho}(X, Y) = \sup\{\rho(x, Y) \mid x \in X\}.$$

Расстояние $\tilde{\rho}(X, Y)$ действительно асимметрично в том смысле, что, вообще говоря, $\tilde{\rho}(X, Y) \neq \tilde{\rho}(Y, X)$. Заметим, например, что $X \subset Y$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\rho}(X, Y) = 0$; при этом если $X \neq Y$, то $\tilde{\rho}(Y, X) > 0$.

Определение 3. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^L$ — компактные множества. Тогда (симметричное) расстояние между X и Y (или, что то же самое, между Y и X) определяется следующим образом:

$$\rho^*(X, Y) = \max\{\tilde{\rho}(X, Y), \tilde{\rho}(Y, X)\}.$$

Можно показать, что $\rho^*(X, Y)$ обладает всеми обычными свойствами расстояния:

$$\rho^*(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y;$$

$$\rho^*(X, Y) = \rho^*(Y, X);$$

$$\rho^*(X, Z) \leq \rho^*(X, Y) + \rho^*(Y, Z).$$

Иными словами, $\rho^*(X, Y)$ задает метрику на компактных множествах в \mathbb{R}^L . Эта метрика называется метрикой Хаусдорфа.

Теперь у нас есть очень удобный способ определить различные концепции непрерывности многозначных отображений:

Определение 4. Пусть $f : A \rightrightarrows \mathbb{R}^L$ — компактнозначное точечно-множественное отображение (*т. е.* образ каждой точки — компакт); $A \subseteq \mathbb{R}^M$. Рассмотрим произвольную точку $\bar{a} \in A$. Тогда f называется:

полу непрерывным сверху в точке \bar{a} , если $\tilde{\rho}(f(a), f(\bar{a})) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \bar{a}$;

полу непрерывным снизу в точке \bar{a} , если $\tilde{\rho}(f(\bar{a}), f(a)) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \bar{a}$;

непрерывным (в метрике Хаусдорфа) в точке \bar{a} , если $\rho^*(f(a), f(\bar{a})) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \bar{a}$.

Непрерывность в метрике Хаусдорфа — это полунепрерывность одновременно и сверху, и снизу.

¹Выражаю благодарность Алексею Савватееву за ценные замечания по тексту.

²Синонимы термина “многозначное отображение”: точечно-множественное отображение, соответствие.

³Обычно существование равновесий доказывается с помощью теоремы Какутани, одним из условий которой является “непрерывность” соответствия (говоря точнее, замкнутость его графика).

На языке последовательностей определения полунепрерывности сверху и снизу можно переформулировать следующим образом:

Полунепрерывность сверху: для любого $\varepsilon > 0$ и для любой последовательности $\{(a^{(n)}, x^{(n)})\}$, такой, что $a^{(n)} \rightarrow \bar{a}$ и $x^{(n)} \in f(a^{(n)})$, все $x^{(n)}$, начиная с некоторого номера, лежат в ε -окрестности множества $f(\bar{a})$.

Полунепрерывность снизу: для любой последовательности $\{a^{(n)}\}$, сходящейся к \bar{a} , и для любого $x \in f(\bar{a})$ существует последовательность $\{x^{(n)}\}$, сходящаяся к x и такая, что $x^{(n)} \in f(a^{(n)})$.

Еще одна известная концепция непрерывности многозначных отображений — замкнутость графика. Именно замкнутость графика используется в теореме Какутани, с помощью которой обычно доказывается существование равновесий. Замкнутость графика тесно связана с полунепрерывностью сверху. А именно, из полунепрерывности сверху следует замкнутость графика, а если область значений отображения f ограничена, то эти две концепции эквивалентны (попробуйте доказать этот факт самостоятельно).

Заметим, что для однозначных отображений как полунепрерывность сверху, так и полунепрерывность снизу совпадает с обычной непрерывностью.

Теперь можно сформулировать основную теорему.

Теорема об Argmax. Рассмотрим максимизационную задачу с параметром

$$\begin{aligned} u(x, a) \rightarrow \max \\ \text{s. t. } x \in X(a), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in \bar{X} \subseteq \mathbb{R}^L$ — переменная, по которой осуществляется максимизация, $a \in A \subseteq \mathbb{R}^M$ — параметр, $X(a) \subseteq \bar{X}$ — область максимизации, зависящая от параметра. Предположим, что

функция $u(x, a)$ непрерывна по (x, a) при $x \in \bar{X}$ и $a \in A$;

точечно-множественное отображение $a \rightarrow X(a)$ компактнозначно и непрерывно в метрике Хаусдорфа (т. е. полунепрерывно и сверху, и снизу) при $a \in A$.

Тогда точечно-множественное отображение $a \rightarrow f(a) = \text{Argmax}\{u(x, a) \mid x \in X(a)\}$ полунепрерывно сверху при $a \in A$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{a^{(n)}\}$, сходящуюся к a . Надо доказать (см. выше определение полунепрерывности сверху на языке последовательностей), что для любой последовательности $\{x^{(n)}\}$, такой, что $x^{(n)} \in f(a^{(n)})$, во всякой окрестности множества $f(\bar{a})$ содержатся все $x^{(n)}$, начиная с некоторого номера.

Пусть это не так. Тогда должна существовать последовательность $\{(b^{(n)}, x^{(n)})\}$, такая, что $\{b^{(n)}\}$ — подпоследовательность для $\{a^{(n)}\}$ (в частности, $\{b^{(n)}\}$ сходится к a), $x^{(n)} \in f(b^{(n)})$ и все $x^{(n)}$ лежат за пределами некоторой фиксированной окрестности множества $f(a)$, которую обозначим F .

Известно, что отображение $X(\cdot)$ полунепрерывно сверху. Значит, в любой заданной окрестности множества $X(a)$ содержатся все $x^{(n)}$ при достаточно больших n . Так как $X(a)$ ограничено, то последовательность $\{x^{(n)}\}$ ограничена. Поэтому для $\{x^{(n)}\}$ существует подпоследовательность $\{y^{(n)}\}$, сходящаяся к некоторому y . Из сказанного выше следует, что y — предельная точка множества $X(a)$, а поскольку $X(a)$ замкнуто, то $y \in X(a)$.

Поскольку $y^{(n)} \notin F$, то $y \notin F$ (так как дополнение к открытому множеству F замкнуто), а значит $y \notin f(a)$ (так как F содержит множество $f(a)$). Т. е. y является допустимой, но не оптимальной точкой в задаче (1) с параметром a . Следовательно, существует точка $z \in X(a)$, такая, что $u(y, a) < u(z, a)$.

Поскольку отображение $X(\cdot)$ полунепрерывно также и снизу, то (см. определение полунепрерывности снизу на языке последовательностей) существует последовательность $\{z^{(n)}\}$, сходящаяся к z и такая, что $z^{(n)} \in X(b^{(n)})$.

Поскольку $y^{(n)} \in f(b^{(n)})$, т. е. $y^{(n)}$ — оптимум в задаче (1) с параметром $b^{(n)}$, то $u(y^{(n)}, b^{(n)}) \geq u(z^{(n)}, b^{(n)})$. В силу непрерывности функции u в этом неравенстве можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Получаем $u(y, a) \geq u(z, a)$, что противоречит полученному выше неравенству $u(y, a) < u(z, a)$. Это противоречие доказывает теорему. \square

Из доказанной теоремы следует, что для непрерывных рациональных предпочтений вальрасовский спрос $x(p, w)$ полунепрерывен сверху по (p, w) при $p \gg 0$ (т. е. когда цены на все товары положительные, а не нулевые). В самом деле, непрерывные рациональные предпочтения можно реализовать непрерывной функцией полезности $u(x)$, которую надо максимизировать на бюджетных множествах $B_{p,w}$. Нетрудно проверить, что при $p \gg 0$ бюджетное множество $B_{p,w}$ зависит от (p, w) непрерывным образом (в метрике Хаусдорфа). Следовательно, отображение $x(p, w)$ полунепрерывно сверху. В частности, однозначный спрос непрерывен (в обычном смысле), что используется при доказательстве существования равновесий.

Следует отметить, что если какие-то из цен становятся нулевыми, то возникают проблемы с применимостью теоремы об Argmax. Во-первых, при таких p отображение $x(p, w)$ перестает быть компактнозначным. Но даже если искусственно ограничить сверху допустимые объемы потребления товаров (этот прием иногда используется при доказательстве существования равновесий), то остается другая проблема: нарушение непрерывности.

Рассмотрим, например, бюджетные множества $B_{p_1, p_2, w}$ на наборах из двух товаров (x_1, x_2) , где $p_1 = 1$, $p_2 = p$, $w = p$ (такая ситуация возникает, когда у потребителя есть начальный запас из одной единицы товара 2 и доход формируется из выручки от продажи этого запаса на рынке). Пусть второй товар может потребляться в количестве, не большем 2. При $0 < p < 1$ бюджетное множество $B_{p_1, p_2, w}$ представляет собой треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(p, 0)$. При приближении p к нулю треугольник становится все более тонким и при $p \rightarrow 0$ стремится (в метрике Хаусдорфа) к отрезку, соединяющему точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$. Но при точном равенстве $p = 0$ бюджетное множество оказывается больше предельного: это отрезок от $(0, 0)$ до $(0, 2)$. Получается, что при $p = 0$ отображение $p \rightarrow B_{p_1, p_2, w}$ терпит разрыв (нарушается полунепрерывность снизу). Нетрудно привести пример непрерывной функции полезности на потребительских наборах, для которой спрос будет разрывен при $p = 0$. Основываясь на этом примере, можно привести и пример экономики обмена, не имеющей равновесия.