

ЭКЗАМЕН ПО КУРСУ “МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ–2”

22 декабря 2004г.

Вам предлагается четыре задачи по темам курса. Суммарный вес задач составляет 140 очков. Все ответы должны быть обоснованы.

Экзамен продолжается 4 часа.

Желаем успеха!

Задача 1 (40 очков). Дана задача оптимального управления: минимизировать функционал

$$x_1^2 + 2x_1 + \int_{t_0}^0 \left((u+x)^2 + 2u \right) dt$$

при ограничениях

$$\frac{dx}{dt} = x + u, \quad u \leq 0.$$

значения $t_1 = 0$, $t_0 < 0$, $x(t_0) = x_0$ считаются заданными, а значение $x(t_1) = x_1$ — свободное.

- Выписать для этой задачи сопряженное уравнение, условие трансверсальности и принцип максимума.
- Описать различные режимы оптимального управления u , зоны их действия и линии переключения (в координатах (t, x)).
- Для случая $t_0 = -2$ описать, какие последовательности режимов управления могут встретиться на оптимальных траекториях $x(\cdot)$ и указать области значений $x_0 = x(-2)$, при которых реализуются эти последовательности.
- Найти оптимальную траекторию $x(\cdot)$ и оптимальное управление $u(\cdot)$ для начальных данных $t_0 = -2$, $x_0 = 0$.

Задача 2 (35 очков). Дана линейная задача оптимального управления: минимизировать функционал

$$t_1 + \int_0^{t_1} (2x_1 + x_2 + 7u) dt$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + 3u, \quad u \in [1, 2]. \end{aligned}$$

значения $t_0 = 0$, $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$ и $x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$ считаются заданными, а конечный момент времени t_1 — свободный.

- Выписать для этой задачи сопряженную систему уравнений, условие трансверсальности и принцип максимума.
- Описать основные режимы управления u , удовлетворяющие принципу максимума, и в фазовой плоскости (x_1, x_2) определить соответствующие семейства траекторий.
- Описать синтез оптимального управления: зоны действия различных режимов, линии переключения, финальные траектории, а также множество достижимости, состоящее из пар (x_1^0, x_2^0) , для которых задача разрешима.
- Какой вид имеют оптимальные траектории и для каких из них реализуется вырожденный случай в принципе максимума ($\lambda_0 = 0$)?

Задача 3 (35 очков).

- а) Описать на плоскости (x_1, x_2) эффективные по Парето точки в задаче с двумя максимизируемыми критериями:

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2) &= 21x_1 - 5x_2 - 4x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2, \\f_2(x_1, x_2) &= \min\{1 - x_1, 1 - x_2\}.\end{aligned}$$

Ответ проиллюстрировать графически.

- б) Рассмотрим экономику обмена с двумя участниками и двумя товарами. Первый участник имеет функцию полезности $u_1(x_1, x_2)$, совпадающую с $f_1(x_1, x_2)$ из пункта а) и начальную собственность $a_1 = 2$, $a_2 = 6$. Второй участник имеет функцию полезности $u_2(y_1, y_2) = f_2(20 - y_1, 12 - y_2)$ и начальную собственность $b_1 = 18$, $b_2 = 6$. Таким образом, в экономике всего имеется 20 единиц первого товара и 12 единиц второго. Требуется в ящике Эджворта описать эффективные по Парето точки и найти все варианты конкурентного обмена.

Задача 4 (30 очков). Рассматривается экономика обмена с двумя видами товаров, одним производителем и одним потребителем. Производственное множество Y и потребительское множество X заданы системами неравенств

$$\begin{array}{ll}Y : & \begin{aligned}y_1 + 2y_2 &\leq 0, \\5y_1 + y_2 &\leq 0, \\13y_1 + 8y_2 + 54 &\geq 0;\end{aligned} & X : & \begin{aligned}10x_1 + 7x_2 &\leq 126, \\0 \leq x_1 &\leq 8, \\x_2 &\geq 0.\end{aligned}\end{array}$$

Производитель при заданных ценах $p = (\pi, 1 - \pi)$, $\pi \in [0, 1]$, максимизирует на множестве Y свою прибыль $\psi(\pi) = \pi y_1 + (1 - \pi)y_2$, определяя тем самым предложение на рынке товаров. Потребитель располагает начальным запасом $a = (a_1, a_2) = (6, 13)$ и максимизирует свою функцию полезности $u(x_1, x_2) = 5x_1 + x_2$ на множестве X при бюджетном ограничении $\pi x_1 + (1 - \pi)x_2 \leq \varphi(\pi)$, где $\varphi(\pi) = \psi(\pi) + \pi a_1 + (1 - \pi)a_2$.

Описать как функцию ценового параметра π (возможно, многозначную): прибыль $\psi(\pi)$, предложение со стороны производителя на рынке товаров, спрос потребителя и избыточный спрос. Найти равновесные цены, соответствующие объемы производства и спрос.