Задача про зонтик

Два студента РЭШ, Маня и Ваня, каждое утро ходят на занятия пешком. Погода на улице переменчивая, с вероятностью 0.4 может идти дождик, с вероятностью 0.6 – светить солнце, поэтому они должны решить, брать ли с собой зонтик, или нет.

Маня живет в комнате с окном, выходящим на улицу, в связи с чем имеет возможность непосредственно наблюдать состояние погоды. В комнате Вани окна отсутствуют, зато в стене проверчена дырка для подглядывания за Маней, посредством которой он может узнать, взяла ли Маня зонтик.

Полезность у промокшего студента меньше, чем у сухого, однако таская зонтик в ясную погоду, они также не испытывают особой радости. Кроме того, из-за вредности характера, каждый из них получает некоторое удовольствие, если другому плохо. В результате их выигрыши составляют (в левом верхнем углу – выигрыш Мани, в правом нижнем – Вани):

Ваня

Маня	Зонтик	Не зонтик
Зонтик	3 / –2	–1 / 2
Не зонтик	5 / –2	2 / 2

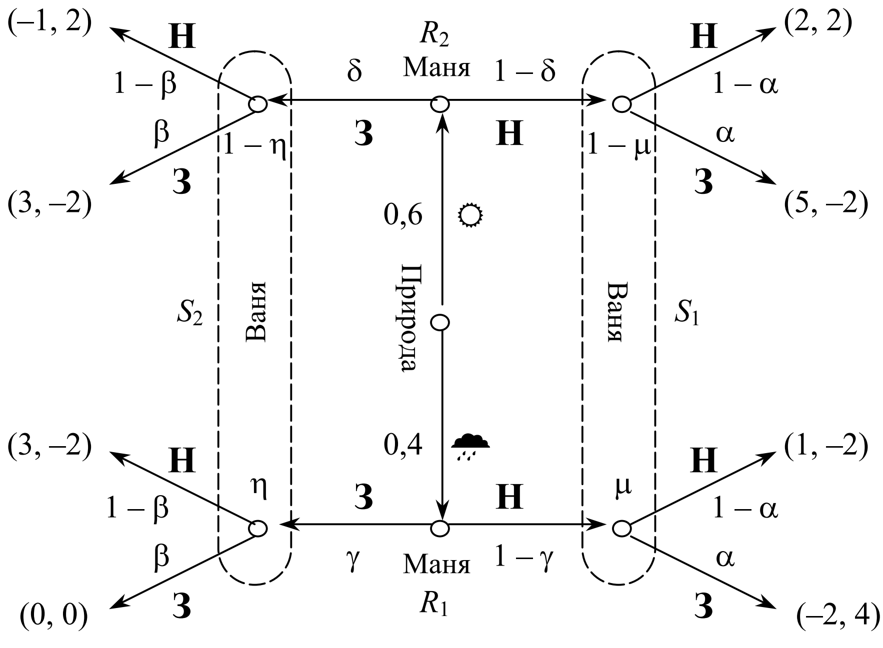
Ваня

Маня	Зонтик	Не зонтик
Зонтик	0 / 0	3 / –2
Не зонтик	–2 / 4	1 / –2

Изобразить развернутую форму игры, найти секвенциальные равновесия.

Решение.

а). Развернутая форма игры имеет вид:



б). Ищем секвенциальные равновесия.

Шаг 1. Строим *секвенциально рациональные* стратегии игроков в каждом информационном множестве. Записываем ожидаемый выигрыш игрока при использовании каждого из ходов, и определяем, какая поведенческая стратегия дает ему максимальный ожидаемый выигрыш. Начинаем, как обычно, с конца:

S_1:

$Eu_B(\mathbf{З}) = 4\mu - 2(1 - \mu) = 6\mu - 2$

$Eu_B(\mathbf{Н}) = -2\mu + 2(1 - \mu) = 2 - 4\mu$

$$\Rightarrow \quad \alpha^*(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu > 0.4 \\ [0,1], & \mu = 0.4 \\ 0, & \mu < 0.4 \end{cases}$$

S_2:

$Eu_B(\mathbf{З}) = -2(1 - \eta) = 2\eta - 2$

$Eu_B(\mathbf{Н}) = -2\eta + 2(1 - \eta) = 2 - 4\eta$

$$\Rightarrow \quad \beta^*(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta > \frac{2}{3} \\ [0,1], & \eta = \frac{2}{3} \\ 0, & \eta < \frac{2}{3} \end{cases}$$

R_1:

$Eu_M(\mathbf{З}) = 3(1 - \beta) = 3 - 3\beta$

$Eu_M(\mathbf{Н}) = -2\alpha + (1 - \alpha) = 1 - 3\alpha$

$$\Rightarrow \quad \gamma^*(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1, & \alpha - \beta > -\frac{2}{3} \\ [0,1], & \alpha - \beta = -\frac{2}{3} \\ 0, & \alpha - \beta < -\frac{2}{3} \end{cases}$$

R_2:

$Eu_M(\mathbf{З}) = 3\beta - (1 - \beta) = 4\beta - 1$

$Eu_M(\mathbf{Н}) = 5\alpha + 2(1 - \alpha) = 2 + 3\alpha$

$$\Rightarrow \quad \delta^*(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1, & \frac{4}{3}\beta - \alpha > 1 \\ [0,1], & \frac{4}{3}\beta - \alpha = 1 \\ 0, & \frac{4}{3}\beta - \alpha < 1 \end{cases}$$

Шаг 2. Обеспечиваем *слабую согласованность* вер игроков с полученными стратегиями. Для этого необходимо определить вероятности попадания в вершины информационных множеств при использовании полученных на первом шаге стратегий и приравнять их верам игроков.

Какие ситуации имеет смысл при этом рассматривать ? Посмотрим, какие сочетания ограничений в стратегиях γ^* и δ^* могут реализоваться.

Из рисунка видно, что могут реализоваться шесть ситуаций:

а. $\alpha < \frac{4}{3}\beta - 1$, $\gamma^* = 0$, $\delta^* = 1$;

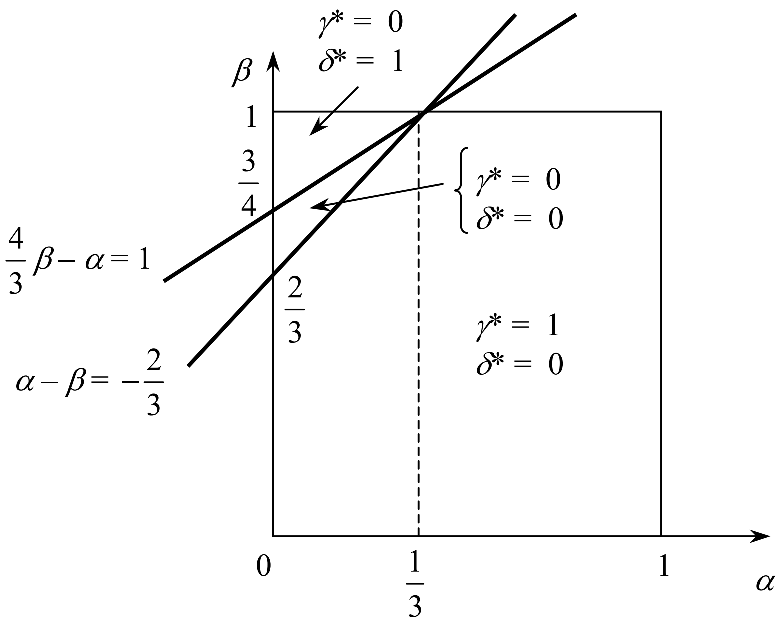
б. $\frac{4}{3}\beta - 1 < \alpha < \beta - \frac{2}{3}$, $\gamma^* = 0$, $\delta^* = 0$;

в. $\alpha > \beta - \frac{2}{3}$, $\gamma^* = 1$, $\delta^* = 0$;

г. $\alpha = \beta - \frac{2}{3}$, γ^* – любое, $\delta^* = 0$;

д. $\alpha = \frac{4}{3}\beta - 1$, $\gamma^* = 0$, δ^* – любое;

е. $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = 1$, γ^* и δ^* – любые.



Определим вероятности попадания в вершины информационных множеств для данных ситуаций.

а). $\gamma^* = 0$, $\delta^* = 1$ => при таких стратегиях игра может попасть в только в нижнюю вершину информационного множества S_1 и только в верхнюю вершину информационного множества S_2. Веры, согласованные с этими вероятностями, составляют $\mu = 1$, $\eta = 0$. При таких верах секвенциально рациональными будут стратегии игрока Вани $\alpha^* = 1$, $\beta^* = 0$. Но эти стратегии не удовлетворяют условию $\alpha < \frac{4}{3}\beta - 1$, следовательно **равновесия тут нет**.

б). $\gamma^* = 0$, $\delta^* = 0$. Игра может попасть только в информационное множество S_1 , причем вероятности попадания в его вершины совпадают с вероятностями попадания в информационные множества R_1 и R_2. Веры, слабо согласованные с этими вероятностями, будут $\mu = 0.4$, η – любая (так как в S_2 игра не попадает). Видим, что при таких верах секвенциально рациональные α^* и β^* могут быть любыми. Рассмотрим различные (под)случаи.

б.1. Пусть $\eta > \frac{2}{3}$, тогда $\beta = 1$. Условия $\frac{4}{3}\beta - 1 < \alpha < \beta - \frac{2}{3}$ в этом случае являются несовместными.

б.2. Пусть $\eta < \frac{2}{3}$, тогда $\beta = 0$. Условия на α дают $\alpha < -\frac{2}{3}$, что нереализуемо.

б.3. При $\eta = \frac{2}{3}$ данным условиям удовлетворяют $\beta > \frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}\beta - 1 < \alpha < \beta - \frac{2}{3}$. Таким образом, ситуации $\{\beta^* > \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\beta^* - 1 < \alpha^* < \beta^* - \frac{2}{3}, \alpha^* \geq 0, \gamma^* = 0, \delta^* = 0, \mu = 0.4, \eta = \frac{2}{3}\}$ **образуют слабые секвенциальные равновесия в этой игре**.

в). $\gamma^* = 1$, $\delta^* = 0$. Игра может попасть в только в нижнюю вершину информационного множества S_2 и только в верхнюю вершину информационного множества S_1. Веры, согласованные с этими вероятностями, составляют $\mu = 0$, $\eta = 1$. Секвенциально рациональными являются стратегии $\alpha^* = 0$, $\beta^* = 1$. Как видно, условие $\alpha > \beta - \frac{2}{3}$ в этом случае не выполняется. **Равновесия нет.**

г). γ^* – любое, $\delta^* = 0$. Игра может попасть только в нижнюю вершину информационного множества S_2, а вероятности попадания в вершины информационного множества S_1

составляют ($\dfrac{0.4(1-\gamma)}{0.4(1-\gamma)+0.6}$, $\dfrac{0.6}{0.4(1-\gamma)+0.6}$).

При $\gamma > 0$ с такими вероятностями согласованы веры $\mu = \dfrac{0.4(1-\gamma)}{0.4(1-\gamma)+0.6}$, $\eta = 1$. Секвенциально рациональная стратегия, соответствующая $\eta = 1$, будет $\beta = 1$. Кроме того, при любом $\gamma > 0$, $\mu < 0.4$, откуда $\alpha = 0$. Но такие стратегии не удовлетворяют условию $\alpha = \beta - \dfrac{2}{3}$, то есть, **равновесия здесь нет.**

Если $\gamma = 0$, то игра не попадает в S_2 , поэтому веры, согласованные с такими ходами, будут $\mu = 0.4$, η – любое. Нетрудно проверить, что таким верам соответствуют **равновесия** $\{\beta^* = 1,\ \alpha^* = \dfrac{1}{3},\ \gamma^* = 0,\ \delta^* = 0,\ \mu = 0.4,\ \eta > \dfrac{2}{3}\}$ и

$\{\beta^* \geq \dfrac{2}{3},\ \alpha^* = \beta^* - \dfrac{2}{3},\ \gamma^* = 0,\ \delta^* = 0,\ \mu = 0.4,\ \eta = \dfrac{2}{3}\}$.

д). $\gamma^* = 0$, δ^* – любое. Игра может попасть только в верхнюю вершину информационного множества S_2, а вероятности попадания в вершины информационного множества S_1 составляют ($\dfrac{0.4}{0.4+0.6(1-\delta)}$, $\dfrac{0.6(1-\delta)}{0.4+0.6(1-\delta)}$). Если $\delta > 0$, то с такими вероятностями согласованы веры $\mu = \dfrac{0.4}{0.4+0.6(1-\delta)}$, $\eta = 0$. Секвенциально рациональная стратегия, соответствующая $\eta = 0$, будет $\beta = 0$. При любом $\delta > 0$, $\mu > 0.4$, откуда $\alpha = 1$. Видим, что условие $\alpha = \dfrac{4}{3}\beta - 1$ не выполняется. **Равновесия нет.**

Если $\delta = 0$, то $\mu = 0.4$, η – любое. Отсюда можно получить уже знакомое нам равновесие $\{\beta^* = 1,\ \alpha^* = \dfrac{1}{3},\ \gamma^* = 0,\ \delta^* = 0,\ \mu = 0.4,\ \eta > \dfrac{2}{3}\}$ и еще одно семейство

$\{\beta^* \geq \dfrac{3}{4},\ \alpha^* = \dfrac{4}{3}\beta^* - 1,\ \gamma^* = 0,\ \delta^* = 0,\ \mu = 0.4,\ \eta = \dfrac{2}{3}\}$.

е). γ^* и δ^* – любые. Этот случай соответствует единственной поведенческой стратегии Вани $\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\beta = 1$. Веры, при которых такая стратегия будет рациональной, составляют $\mu = 0.4$, $\eta \geq \dfrac{2}{3}$. Но они дают нам подмножество уже найденных равновесий, в которых $\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\beta = 1$.

Таким образом, в нашей задаче имеются два семейства слабых секвенциальных равновесий:

$\{\beta^* \geq \dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\beta^* - 1 \leq \alpha^* \leq \beta^* - \dfrac{2}{3},\ \alpha^* \geq 0,\ \gamma^* = 0,\ \delta^* = 0,\ \mu = 0.4,\ \eta = \dfrac{2}{3}\}$ и

$\{\beta^* = 1,\ \alpha^* = \dfrac{1}{3},\ \gamma^* = 0,\ \delta^* = 0,\ \mu = 0.4,\ \eta > \dfrac{2}{3}\}$.