ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ИГР

1. Развернутая и нормальная форма

1) **Крестики и нолики.** Рассматривается игра в обычные "крестики-нолики" (3×3). Все ли знают ее правила? Для нас сейчас неважно, кто и когда в ней выигрывает, нас интересуют лишь различные формы, в которых может быть представлена игра. Для простоты можете считать, что терминальными позициями являются только те, в которых все 9 клеток заполнены, т. е. игра продолжается даже если уже ясно, кто выиграл.

   а) Сколько *позиций* имеет игра, иными словами, сколько существует расстановок крестиков и ноликов, которые могут возникнуть по ходу игры (и в ее конце)?

   б) Сколько вершин в дереве игры (в развернутой форме)? Сравните с п. 1а.

   в) Подсчитайте, хотя бы приблизительно, сколько стратегий имеется у каждого участника в каждом из рассмотренных представлений игры (см. пп. 1а и 1б).

2) **Захват рынка.** Две фирмы A и B производят некоторый товар. В каждый момент времени $t = 1, \ldots, 5$ каждая фирма может произвести единицу товара либо ничего не производить. Затраты на производство равны 3, а цена продажи определяется числом n активных фирм на рынке и составляет $6 - 2n$.

   а) Опишите развернутую форму этой игры, стратегии участников и функции выигрыша. Сколько стратегий у каждой фирмы?

   б) Те же вопросы, если, однажды выйдя с рынка, фирма уже не может вернуться.

3) **Рабочий и управляющий.** В игре имеются два участника: рабочий и управляющий. Если рабочий работает, он теряет 1, а управляющий получает 3. Иначе рабочий ничего не теряет а управляющий теряет 1. Управляющий назначает рабочему зарплату w.

   а) Пусть рабочий и управляющий принимают свои решения одновременно. Нарисовать развернутую и нормальную форму. Внимание: правильно понять и формализовать игру — входит в задание!

   б) Тот же вопрос для случая, когда рабочему известно, сколько ему будут платить. Как Вы думаете, чем кончится игра и кто сколько выиграет?

4) **Делим пирог.** Рассмотрим две модели "справедливой" дележки пирога между двумя соискателями.

   а) Один режет пирог на две части, другой выбирает себе любую из них. Описать развернутую и нормальную форму. Каков наиболее вероятный исход игры?

   б) Один режет пирог на две части и пишет на них "1" и "2". Другой в это время, отвернувшись, говорит, какую часть ему выдать. Описать развернутую и нормальную форму. Как Вы думаете, может ли произойти неравный раздел? Как-нибудь обоснуйте свой ответ.

2. Решение по доминированию

1) **Решите по доминированию** игру с матрицей выигрышей

$$\begin{bmatrix} 5,2 & 2,6 & 1,4 & 0,3 \\ 4,1 & 3,4 & 2,1 & 1,2 \\ 1,0 & 1,1 & 1,5 & 5,1 \\ 2,3 & 0,1 & 0,2 & 4,4 \end{bmatrix}$$

2) **Итерационные игры.** Играют n участников. Функция полезности участника с номером k имеет вид $u_k(s_1, \ldots, s_k)$. Можно ли решить игру по доминированию? Если надо, сделайте какие-нибудь разумные предположения.

3. Игры с нулевой суммой

1) **Примеры игр с нулевой суммой.** Найти максимин α и минимакс β в чистых стратегиях, а также все седловые точки (они же равновесия Нэша) и цену игры в смешанных стратегиях:

а) $$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

б) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

2) **Два пальца.** Есть такая замечательная игра. Участники одновременно показывают один или два пальца. Потом считают сумму s (она может получиться от двух до четырех). Если s четно, то второй игрок выиграл у первого s долларов, если же s нечетно, то наоборот, выиграл первый.

   а) Найдите седловую точку в смешанных стратегиях и цену игры. Справедлива ли игра, и, если нет, то кому лучше?

   б) Те же вопросы для игры “три пальца” (можно выбрасывать от одного до трех пальцев).

3) **Еще одна игра “на пальцах”.** Двое играют на деньги. Участники одновременно показывают сколько-то пальцев (от 1 до n). Если оказалось поровну, то ничья. Если число пальцев, показанных одним и другим игроком, отличается на 1, то тот, у кого меньше, выигрывает \$2. В остальных случаях тот, у кого больше, выигрывает \$1.

   а) Можно ли, не производя никаких вычислений, определить цену игры в смешанных стратегиях? Приведите соображения, обосновывающие ваш ответ.

   б) Пусть $n = 3$. Как надо играть?

   в) Верно ли, что при любом n в игре имеется ровно одно смешанное равновесие?

4. Равновесие по Нэшу

1) **Задача про лыжников.** Двое бегут по лыжной трассе навстречу друг другу. У каждого две стратегии: уступить или не уступить (для определенности предположим, что лыжники руководствуются принципом правостороннего движения). Уступивший дорогу теряет на этом 2 сек., а если столкнулись, то будут распутываться 10 сек.

   а) Найдите все (и чистые, и смешанные) равновесия в данной игре, предполагая, что проигрыш участников определяется потерянным временем. Какие из равновесий являются эффективными (оптимальными по Парето в сильном или слабом смысле)?

   б) Решить задачу 1а в предположении, что можно еще уступить половину лыжни — мы ведь бегаем классикой! При этом теряется 1 сек. (в дополнение к возможным десяти). Сколько будет равновесий? Что на сей раз можно сказать об их эффективности?

2) **Торговцы на станции.** На станции Тайга трое местных предпринимателей, Александр, Василий и Семен (A, B, C), промышляют тем, что продают пассажирам, соответственно, пиво, воблу и соленые орешки. Утром приходят сразу два поезда, поэтому каждый спешит поставить свою торговую точку на первой или второй платформе. Если торговец работает на платформе в одиночку, его выручка (в рублях) от продажи товаров пассажирам соответствующего поезда определяется из таблицы:

Платформа	A	B	C
1	80	60	60
2	100	40	40

Если в одном месте продаются и пиво, и закуска, то этих товаров удается продать на 50% больше из-за эффекта дополняемости. Впрочем, если продавцы закуски находятся на одной платформе, то вследствие конкуренции оба выручают вдвое меньше, чем когда они на разных платформах.

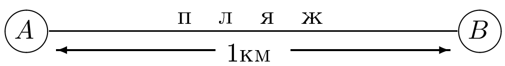
а) Формализуйте взаимодействие торговцев как игру в нормальной форме, предполагая, что до установки торговой точки никто из них не может получить информацию о том, где будут другие.

б) Найдите все чистые и смешанные равновесия Нэша в этой игре.

в) Что изменится, если Александр будет в одиночку зарабатывать на второй платформе не 100, а 60 рублей?

3) **"Гладкая" игра.** Играют двое. Стратегии игроков задаются вещественными параметрами s и t ($s, t \in [-1, 1]$). Выигрыши равны, соответственно, $2\alpha st - s^2$ и $t^3 - 3st$. Изобразите кривые реакции обоих участников (если возможно, разными цветами или стилями линий) и найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях для $\alpha = -\frac{3}{4}$, $\alpha = \frac{1}{4}$ и $\alpha = 2$.

4) **Продавцы мороженого на пляже.** На городском пляже стоят два ларька (A и B), торгующие мороженым. Продавцы независимо устанавливают цены $p_A, p_B \in [0, \infty)$; издержками пренебрегаем. Все выглядит примерно так:



Народ равномерно распределился по пляжу и загорает. В этот день очень жарко, поэтому каждый из отдыхающих готов переплатить за лакомство рубль, только бы не идти лишние 100м по раскаленному песку.

а) Предположим, что каждый, во что бы то ни стало, стремится приобрести себе стаканчик мороженого. Полностью опишите отображения наилучшего ответа, изобразите на плоскости (p_A, p_B) кривые реакции и найдите все равновесия Нэша. Естественно, все в чистых стратегиях.

б) Выполните задание п. 4а в предположении, что ценность стаканчика мороженого составляет $v \geq 0$, т. е. каждый потребитель был бы готов заплатить за мороженое цену v, если бы оно продавалось рядом (как нетрудно видеть, в п. 5а $v = \infty$). Рассмотрите все возможные случаи. Указание: чтобы избежать лишней возни с несущественными кусками кривых, можете исключить что-нибудь по доминированию.

5) **Продавцы мороженого в Игарке.** Город Игарка весь расположен вдоль одной улицы длиной 3 км. Два конкурирующих продавца мороженого независимо выбирают места для своих торговых точек. Покупатели, естественно, идут к ближайшему ларьку (в Игарке -50°C). Если расстояния до ларьков одинаковы (в частности, если ларьки находятся в одной точке), то место покупки мороженого выбирается покупателем случайно и равновероятно.

а) Пусть цена мороженого фиксирована и все хотят его купить. Найти все равновесия в чистых стратегиях.

б) Предположим, что в задаче 5а покупатели из-за риска замерзнуть не ходят дальше 1 км от дома. Найдите все равновесия.

в) А что будет, если в задаче 5а продавцов не два, а три?

г) Решить задачу 5в, предполагая, что три продавца выбирают свое местоположение вдоль Московской кольцевой автомобильной дороги.

6) **Дуополия с дифференцированными товарами.** Две фирмы производят два различных товара. Эти товары частично взаимозаменяемы и спрос на них формируется по закону

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \max\left\{\frac{1 - 2p_1 + p_2}{3}, 0\right\};\\
q_2 &= \max\left\{\frac{1 + p_1 - 2p_2}{3}, 0\right\},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $p_1, p_2 \geq 0$ — цены, а $q_1, q_2 \geq 0$ — выпуски. Затраты на производство единицы продукции составляют, соответственно, c_1 и c_2 ($c_1, c_2 \geq 0$).

а) Пусть фирмы независимо устанавливают свои цены, после чего удовлетворяют возникший на рынке спрос. При каких c_1 и c_2 реализуется равновесие с положительными ценами и выпусками? Найдите для этого случая равновесные p_1, p_2, q_1, q_2.

б) А теперь, наоборот, пусть фирмы выбирают, сколько они будут производить, а цены на рынке формируются в соответствии с законом спроса (1) (если правая часть какой-либо из получающихся формул отрицательна, то считаем соответствующую цену нулевой). Ответьте на те же вопросы, что в п. 6а

в) Сравните равновесия, реализующиеся при ценовой и количественной конкуренции. Отдельно рассмотрите случай $c_1 = c_2$.

7) **Аукцион печенья.** Имеется пакет с печеньем, который нужно поделить между n участниками. Количество печенья в пакете всем известно. Каждый участник тайно от других пишет на листке бумаги свое имя и сколько продукта он хотел бы получить. Все заявки упорядочиваются по возрастанию, после чего ведущий по очереди выдает каждому запрошенное им количество, начиная с самых "скромных". Если в некоторый момент печенье кончается, то заявившие слишком много, увы, остаются ни с чем (если оставшегося печенья оказывается недостаточно, чтобы обслужить несколько одинаковых заявок, то делим между ними поровну). Если же остались лишние печенья, их съедает ведущий.

а) Найдите все симметричные равновесия в чистых стратегиях. Дискретностью печенья можно пренебречь.

б) Есть ли в этой игре несимметричные чистые равновесия? Если есть, приведите пример, а если нет, то объясните, почему.

5. Динамические игры с совершенной информацией

1) **Вариант игры Баше.** В игре участвуют двое, ходя по очереди (первый, второй, первый и т. д.). На столе лежит n камней. В свой ход каждый из участников может изъять 2^k камней ($k = 0, 1, 2, \ldots$; естественно, нельзя снять со стола больше, чем там есть). Выигрывает тот, кто своим ходом оставляет пустой стол.

а) Пользуясь принципом Цермело, определите выигрышные и проигрышные позиции в игре. Для этого, например, можно исследовать несколько первых позиций и угадать закономерность. Обязательно обоснуйте свой ответ.

б) Опишите выигрышную стратегию игрока (в случае, если она у него есть). Когда выигрывает первый, а когда второй? Может ли быть ничья?

в) Пусть $n = 50$ и Вам ходить. Ваши действия?

2) **Вариант игры Ним.** Снова два участника ходят по очереди. Теперь на столе уже две кучки камней (m камней в первой кучке и n во второй). В свой ход игрок может взять сколько угодно камней из одной кучки, либо одинаковое количество из обеих. Надо обязательно взять хотя бы один камень. Как и раньше, выигрывает тот, кто своим ходом оставляет пустой стол.

а) Опишите процесс последовательного определения выигрышных и проигрышных позиций в этой игре. Найдите выигрышные стратегии для малых m и n.

б) Пусть $m = 15$, $n = 7$ и Ваш ход. Как надо сыграть?

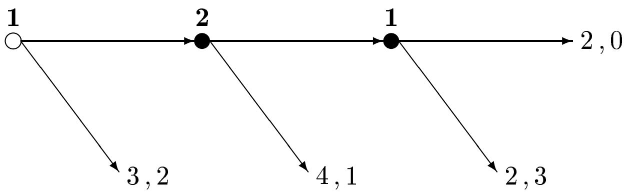
в) Тот же вопрос, если $m = 8$ и $n = 13$.

3) **Русская рулетка.** Два офицера русской армии повздорили из-за одной барышни. Порешили так: в барабан шестизарядного револьвера случайным образом помещается одна пуля. После чего они по очереди пытаются выстрелить в себя. Впрочем, можно и спасовать, отказавшись тогда от притязаний на невесту. Выигравший идет делать предложение, проигравший остается лежать убитым, спасовавший возвращается в свой полк, что, конечно, для него предпочтительней.

а) Формализуйте этот конфликт как игру с совершенной информацией, т. е., без информационных множеств. При этом считайте, что застрелившийся получает полезность -1, спасовавший — 0, а выигравший — соответственно, a или b, т. е. участники по-разному оценивают качества будущей спутницы жизни :-). Предполагается, что $a > 0$ и $b > 0$.

б) Решите игру по доминированию, используя алгоритм Цермело — Куна. Какими будут равновесные стратегии в зависимости от параметров a и b? Удобно дать ответ в виде диаграммы в координатах (a, b), на которой указаны соответствующие области. Граничные случаи (когда кому-то все равно, как действовать) рассматривать не надо.

4) **Когда алгоритм Цермело работает плохо.** Найдите все совершенные по подыграм равновесия в игре



Не забыли про смеси?

6. Равновесия, совершенные по подыграм

1) **Трагедия общины: динамическая модель (поход без завхоза).** Имеется некий объем частных благ (например, запас продуктов питания в походе), который может потребляться T периодов. Полезность от разового потребления c единиц продукта составляет $\sqrt{c}$. Индивидуум ценит будущее потребление наравне с настоящим, т. е. дисконтирование отсутствует. Как известно, в этом случае он стремится разделить продукт поровну между T периодами.

Предположим теперь, что участников два, а не один, и потребляют они из одного запаса. В каждом периоде потребление происходит одновременно, т. е. игроки независимо выбирают, сколько съесть (но не более половины от имеющегося).

а) Представьте это в виде игры в развернутой форме. Как устроено дерево?

б) Как бы вы искали совершенное по подыграм равновесие в этой игре? Указание: изобретите что-нибудь типа функций Беллмана, найдите равновесные стратегии потребления и выведите рекуррентные соотношения на параметры. Является ли равновесие оптимальным по Парето?

в) Пусть $T = 3$ и вначале имеется 290 единиц продукта. Какими будут равновесные траектории потребления?

7. Повторяющиеся игры.

1) **Двукратное повторение.** Рассмотрим одновременную игру G_0 с таблицей выигрышей

	X	Y
x	5,5	1,6
y	6,1	0,0

Представим теперь, что эта игра повторяется дважды. Все, что происходило в первом периоде, становится общим знанием во втором. Выигрыши первого и второго периодов суммируются (без дисконтирования). Обозначим эту двухпериодную игру G.

а) Как устроено дерево этой игры? Как задаются стратегии участников?

б) Сколько имеется чистых совершенных по подыграм равновесий в G? Указание: нужно перебрать всевозможные варианты равновесий в подыграх второго периода, для каждого из них прибавить выигрыши к выигрышам первого периода и исследовать полученную одиопериодную игру (будем обозначать ее $\tilde{G}$).

в) Обратимся к смешанному расширению игры G (в поведенческих стратегиях). Пусть равновесные исходы подыгр второго периода зафиксированы и, таким образом, игра сведена к некоторой однопериодной игре $\tilde{G}$. Может ли профиль чистых стратегий, неравновесный в исходной игре G_0, участвовать на первом шаге в совершенном равновесии игры G? Может ли в одной и той же игре $\tilde{G}$ быть более одного равновесия, обладающего таким свойством?

г) Более сложный вопрос: сколько всего чистых и смешанных совершенных равновесий в игре G? Указание: достаточно выяснить, какие из игр $\tilde{G}$ имеют более одного равновесия. В этом может помочь пункт 1в.

2) **Суперравновесия.** Рассмотрим игру с таблицей выигрышей

	a	b
A	0,2	2,3
B	1,0	3,1

а) Пусть каждый участник применяет стратегию наказания Nash reversion (“один раз отклонишься — впредь буду всегда играть равновесие Нэша”). Какие профили *коррелированных* выигрышей можно реализовать таким образом как равновесия в бесконечно повторяющейся игре?

б) Изобразите на плоскости множество коррелированных выигрышей, достижимых в суперравновесиях в силу Народной теоремы.

в) Рассмотрим такую попытку реализовать выигрыши $(2, 3)$: в начальный момент играется (A, b), а далее игрок 1 играет A, если на предыдущем ходу игрок 2 сыграл b и B, если a; игрок 2 действует симметричным образом: a, если B и b, если A. Является ли эта пара стратегий равновесием Нэша в бесконечно повторяющейся игре (при δ, достаточно близком к 1)? Если да, то является ли равновесие совершенным по подыграм?

8. Статические игры с неполной информацией

1) **Байесовский семейный спор или “капризная жена”.** Муж и жена решают, куда пойти — на футбол (*Ф*) или на балет (*Б*). Все осложняется тем обстоятельством, что жена может находиться в хорошем настроении (и тогда стремится быть вместе с мужем), а может и в плохом (и тогда видеть его не может). Короче, вот таблица игры. Строки соответствуют мужу, а столбцы — жене, чей выигрыш зависит от настроения (X, Π):

	Ф	*Б*
Ф	3; 2,0	1; 1,3
Б	0; 0,2	2; 3,1

Найдите все байесовские равновесия, предполагая, что настроения X и Π наступают с равными вероятностями. Не забудьте про смеси.

2) **Rendez-vous-1.** Александра и Виктор живут на одной улице (считаем, что их места жительства являются случайными точками, равномерно и независимо распределенными на отрезке $[-1, 1]$). Для того, чтобы договориться о встрече, они сообщают друг другу, где живут, и встречаются ровно посередине между названными точками. Сообщения делаются одновременно и независимо и необязательно правдивы (но все же в пределах $[-1, 1]$). Полезность каждого из участников равна пройденному расстоянию, взятому со знаком “минус”.

а) Найдите оптимальный ответ Александры на правдивую стратегию Виктора (когда он в любом случае сообщает свое фактическое место жительства).

б) Докажите, что если каждый из участников будет играть, как Александра в п. 2а, то получится байесово равновесие. Будет ли оно эффективным?

в) Разработайте механизм наподобие схемы Гровса, делающий равновесие ex-post эффективным.

3) **Аукцион первой и второй цены.** На аукционе, в котором участвуют два покупателя, продается картина. Ценность ее для покупателя i составляет x_i, $i = 1, 2$, где x_1, x_2 — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$. Информация об x_i доступна только i-му участнику. Игрок i тайно заявляет цену b_i и запечатывает заявку в конверт, на котором пишет свою фамилию.

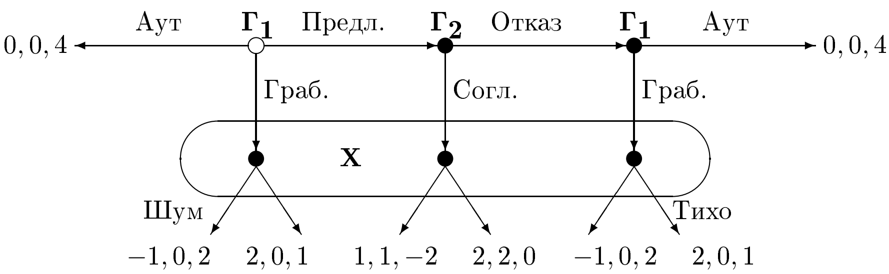
   а) Пусть картина достается тому, кто назвал наибольшую цену, каковую он и платит. Предполагая стратегии игроков такими, что размер заявки пропорционален субъективной ценности картины, найти байесовское равновесие. Будут ли игроки декларировать свои истинные оценки картины?

   б) Тот же вопрос для аукциона "второй цены", когда картина достается тому, кто назвал наибольшую цену, но платит он цену, заявленную проигравшим аукцион.

9. Секвенциальные (совершенные байесовские) равновесия

1) **Совместное дело.** Участники — два грабителя (Γ_1 и Γ_2) и хозяин (X). Грабитель Γ_1 мог бы забраться в дом к X, но у него маловато силенок. Он может предложить Γ_2 пойти с ним на дело. Хозяин видит, что к нему забрались, но не знает, сколько их. Он может сидеть тихо или поднять шум.

   Развернутая форма выглядит так:



   Найдите все секвенциальные равновесия. А есть ли другие равновесия Нэша?

2) **Сомнительное вложение.** Имеется большое число n агентов, которые рассматривают возможность вложения своих средств в некий малоизвестный банк. Изначально все считают, что банк может с равными шансами оказаться надежным или ненадежным. Чистый выигрыш от вложения в надежный банк равен проигрышу от вложения в ненадежный. Все агенты нейтральны к риску.

   Каждый участник принимает решение о вложении средств, основываясь на личном мнении о банке и наблюдая, как ведут себя остальные. Проблема в том, что можно ошибиться и принять хороший банк за плохой или наоборот. Предполагается, что при личной оценке банка ошибка как в ту, так и в другую сторону, происходит с вероятностью ε ($\varepsilon < 1/2$), причем ошибки различных агентов независимы как случайные события.

   Игра протекает так: сначала агент 1 составляет свое (возможно, ошибочное) мнение о банке и вкладывает или не вкладывает в него деньги. Затем включается агент 2: видя, что сделал агент 1, и имея собственную оценку, он также принимает решение, вкладывать или не вкладывать. И так далее: информация, наблюдаемая агентом k, — это его собственная оценка и действия агентов $1, \ldots, k-1$ (но не их личные оценки!).

   а) Как устроено дерево этой игры? Дорисуйте его до конца хотя бы для случая $n = 2$.

   б) Предположим, что если агенту безразлично, вкладывать или нет, то он не вкладывает. Как будут действовать игроки в равновесии? Указание: решите игру по доминированию, воспользовавшись тем, что она итерационная, и покажите, что с вероятностью 1 все игроки, начиная с некоторого, будут вести себя одинаково.

   в) Возможен ли всеобщий обман? Более конкретно: с какой вероятностью почти все вложат в плохой банк; с какой вероятностью почти никто не вложит в хороший? Прокомментируйте.

3) **Кто получит приз?** Двое соискателей, A и B, пытаются выиграть некий приз. Игра происходит в течение трех дней ($t = 1, 2, 3$), причем ценность приза V возрастает со временем по закону $V(t) = 2t + 2$. Имеется запечатанный конверт, в котором написано, кому должен достаться приз. В первый день игрок A может сделать одно из трех действий: либо предложить вскрыть конверт (при этом приз выдается тому, чье имя написано в конверте, после чего игра заканчивается), либо предложить поделить приз поровну (после чего игра также заканчивается), либо подождать следующего дня. На следующий день в игру вступает игрок B, который также может выбрать одно из этих трех действий. Наконец, на третий день, если приз еще не нашел своих обладателей, право голоса вновь переходит к игроку A, который выбирает, вскрывать конверт или поделить приз поровну.

   а) Пусть каждый игрок расценивает априорные шансы на то, что в конверте окажется его или чужое имя, как равные. Изобразите дерево игры. Как будут играть участники? Для определенности можете считать, что игроки проявляют минимальное отвращение к риску, а именно, стремятся в первую очередь максимизировать свой ожидаемый выигрыш, и уже потом, при прочих равных, минимизировать риск (т. е. предпочтения лексикографические).

   б) А теперь несколько более интересная ситуация: предположим, что перед игрой игрок B подглядел, что́ написано в конверте, и это изменение информационной структуры игры (но не сама информация, содержащаяся в конверте!) стало общим знанием. Найдите все сильные секвенциальные равновесия в поведенческих стратегиях.

   в) В предположениях п. 3б ответьте на вопрос: существуют ли в игре “равновесия дискоординации”, когда все ходы секвенциально рациональны, все веры *слабо* согласованы с профилем стратегий, но последний не является равновесием Нэша?

   г) А есть ли в игре п. 3б слабые секвенциальные равновесия, являющиеся равновесиями Нэша, но не являющиеся секвенциальными в сильном смысле?

   д) Сопоставьте результаты предыдущих пунктов и прокомментируйте. Всегда ли дополнительная информация приносит пользу тому, кто ее получает?

4) **Соседи.** Антон и Борис, соседи по общежитию, каждый день тратили по 20 мин. на поход в магазин за продуктами. Им это надоело и, чтобы сэкономить время, они договорились в течение ближайших четырех дней ходить в магазин по очереди и покупать на всех: в первый день Антон, затем Борис и т. д. Покупка продуктов для соседа отнимает лишние 5 мин, поэтому у идущего в магазин появляется соблазн нарушить соглашение и купить продукты только себе. Если кто-то хоть раз так сделает, то в последующие дни ходить в магазин снова будут по отдельности (да и в этот день обманутому соседу придется прогуляться).

   Антон всегда действует сообразно обстоятельствам (в каждый из двух своих дней может выбирать, выполнить или нарушить соглашение), а вот Борис может являться оппортунистом, как Антон, а может быть и честным, т. е. всегда выполнять соглашение (в этом случае у него оба раза по единственному возможному действию). Антон верит, что Борис с вероятностью $p > 0$ является честным.

   а) Как выглядит развернутая форма игры, если полезности участников равны выигранному времени?

   б) При каких p существует секвенциальное равновесие, в котором Антон в первый день играет честно (выполняет соглашение)?

10. Коррелированные равновесия

1) **Примеры на коррелированные равновесия.** Изобразить на плоскости (u_1, u_2) область коррелированных равновесий для следующих игр:

   а) Семейный спор:

$$\begin{bmatrix} 4,3 & 2,2 \\ 0,0 & 3,4 \end{bmatrix}$$

б) Преследование:

$$\begin{bmatrix} 2,0 & 0,1 \\ 0,1 & 2,0 \end{bmatrix}$$

2) **Возможности необязывающих соглашений.** Имеются два участника, каждый из которых может вести себя эгоистически ($Э$) или кооперативно (K). Если оба играют K, то получают по c. Если один играет $Э$, а другой K, то выигрыши составляют, соответственно, a и b $(0 < b < c < a)$. Если оба эгоисты, то по нулям.

   а) С какими весами надо смешивать исходы игры, чтобы получилось коррелированное равновесие? Задайте ответ в виде выпуклой оболочки нескольких наборов весов.

   б) Найдите максимально возможный суммарный выигрыш, реализуемый в коррелированных равновесиях. В каких случаях он превышает то, что достижимо в равновесиях Нэша?

11. Задача торга (для двух участников)

1) **Торг в модели обмена.** У агента 1 есть единица товара x, а у агента 2 — единица товара y. Предпочтения участников задаются функциями полезности, соответственно, $u_1 = \sqrt{xy}$ и $u_2 = \min\left(x, \dfrac{3}{2}y\right)$.

   а) Пусть агенты торгуются за распределение товаров x и y. Найти (и изобразить на рисунке в координатах u_1, u_2) область допустимых выигрышей (Парето-границу) и решение Нэша. Изобразить в ящике Эджворта множество оптимальных по Парето распределений товаров и точку, соответствующую решению Нэша.

   б) Пусть теперь предметом торга является только цена, по которой происходит обмен, а размер сделки устанавливается после этого первым игроком единолично. Снова найти область допустимых выигрышей и решение Нэша (отобразить на тех же рисунках).

   в) Указать на тех же рисунках распределение товаров и пару выигрышей, соответствующие общему равновесию в данной экономике обмена. Сравнить результаты пунктов 1а–1в и прокомментировать.

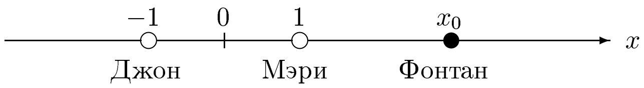
2) **Rendez-vous-2.** Джон и Мэри живут на одной улице (см. рис.) и по умолчанию встречаются у фонтана (x_0). Они могут договориться о встрече в любом другом месте улицы. Полезность участника равна (со знаком минус) расстоянию, которое ему нужно пройти.

   а) Нарисуйте множество допустимых выигрышей (u_1, u_2). Изобразите на нем положения статус-кво при всех возможных значениях параметра x_0.

   б) Пусть x_N — место встречи, соответствующее решению Нэша этой задачи торга. Найдите x_N как функцию от $x_0 \in \mathbf{R}$ и постройте ее график.

   в) Тот же вопрос для x_K — решения Калаи—Смородински.

   г) А что можно сказать про эгалитарное и утилитарное решения?



12. Кооперативные игры: ядро и Шепли

1) **Подземные музыканты.** Оркестр из трех музыкантов (A, B, C) играет в подземном переходе. Поодиночке они могли бы заработать, соответственно, 6, 18 и 30 рублей в час. Играя по двое, они бы получили: A и B — 36, A и C — 48, B и C — 54. А вместе они имеют 72.

   а) Будет ли отвергнут равный дележ, и если будет, то какими коалициями?

б) Найдите ядро игры, т. е. все дележи, которые не будут отвергнуты.

в) Является ли игра супераддитивной? Супермодулярной?

г) Найдите все точки Вебера и вектор Шепли. Что из найденного принадлежит ядру?

2) **Парламент.** Конгресс и Сенат состоят из трех членов каждый. Закон принимается только если в обеих палатах набрано большинство.

а) Найдите ядро этой кооперативной игры.

б) Пусть вдобавок имеется еще президент, одобрение которого обязательно. Сколько он получит в ядре? В векторе Шепли?

в) А потом две палаты объединили. Теперь нужно просто 4 голоса из 6 плюс президентское одобрение. Вроде бы, парламент стал сильнее, так как больше выигрывающих коалиций, чем в 2б. Как изменилась “зарплата” президента?

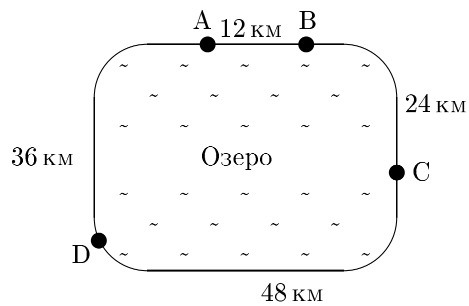
3) **Симметричные игры.** Назовем кооперативную игру с трансферабельной полезностью *симметричной*, если выигрыш $v(K)$ коалиции K зависит только от ее численности $k = |K|$. Без ограничения общности считаем, что $v(N) = N$. Какой должна быть функция $v(k)$ для того, чтобы ядро было непустым? чтобы игра была супермодулярной?

4) **Строительство дороги.** Четыре поселка A, B, C, D расположены на берегу большого озера (см. рис.). Каждый поселок нуждается в автомобильном сообщении с тремя остальными, причем кратчайшим путем (так, незамкнутая дорога $BCDA$ не устраивает жителей поселка B, поскольку они хотят ездить в A напрямик). Местные власти решили скинуться и построить кольцевую дорогу вокруг озера, соединяющую поселки. Вопрос состоит в том, как разделить между поселками издержки по строительству 120 км дороги.

а) Для каждой коалиции найдите минимальную протяженность нужной ей дороги. Опишите ядро игры. Является ли игра супермодулярной?

б) Пусть поселки равноправны в переговорном процессе, а затраты делятся, исходя из вектора Шепли. Сколько километров дороги должен профинансировать каждый поселок?

в) Пусть n_A, n_B, n_C, n_D — число жителей в поселках, причем не обязательно $n_A = n_B = n_C = n_D$. Как в этом случае разумно распределить затраты? В каком соотношении должны находиться числа n_A, n_B, n_C, n_D, чтобы все жители платили один и тот же налог на строительство дороги?



Проект дороги.

5) **Охрана.** Имеется 6 производителей A, B, C, D, E, F, каждый из которых может заработать \$1, и два охранника P и Q, не производящих ничего. Коалиция получает суммарную выручку ее участников, но только в том случае, если среди них есть хотя бы один охранник. Иначе приходят грабители и все забирают. Сколько нужно платить охранникам? Ответьте на этот вопрос с точки зрения ядра и вектора Шепли.

6) **Ядро экономики.** Алиса, Берта и Виола имеют по единице товара, который оценивают, соответственно, в 3, 6 и 8 долларов. Густав, Даниил, Евгений и Жорж могли бы купить по единице этого товара и готовы заплатить за него, соответственно, 2, 4, 7 и 9 долларов.

а) Формализуйте эту ситуацию в виде кооперативной игры с побочными платежами (задайте выигрыши коалиций).

б) Пусто ли ядро этой игры?

7) **Разложение по элементарным играм.** В кооперативной игре v с побочными платежами участвуют игроки 1, 2, 3. Выигрыши коалиций заданы следующим образом:

$$\begin{array}{llll} v(1) = 4, & v(2) = 9, & v(3) = 4, & \\ v(1,2) = 15, & v(1,3) = 12, & v(2,3) = 13, & v(1,2,3) = 20. \end{array}$$

а) Найдите разложение этой игры по базису из элементарных игр v_S, $S \subseteq \{1,2,3\}$.

б) Как из найденного разложения получить вектор Шепли?