Game–2

Группы C и D

Добавление к семинару: как искать коррелированные равновесия.

В отличие от обычного (смешанного) равновесия Нэша, в котором каждый участник самостоятельно смешивает свои чистые стратегии (т. е. строки или столбцы таблицы выигрышей), коррелированное равновесие есть смесь *профилей* стратегий (или исходов) игры, т. е. отдельных клеток таблицы (что, как мы знаем, дает более богатые возможности для реализуемых профилей выигрышей). Разумеется, для того, чтобы эта смесь действительно являлась равновесием, должны выполняться определенные условия совместимости со стимулами (самоотбора), аналогичные оптимальности выбора стратегии в стандартном равновесии Нэша. Эти условия гарантируют, что соглашение о том, как играть, будучи *необязывающим*, все равно выполняется участниками.

Коррелированное равновесие можно представлять себе так: имеется посредник или арбитр, который может случайно смешивать исходы игры с заданными и известными всем весами. Он запускает генератор случайных чисел и получает некоторый случайно реализованный профиль чистых стратегий. Затем арбитр тайно сообщает каждому, какую чистую стратегию тот должен играть. Набор весов, с которыми смешиваются исходы, является коррелированным равновесием, если ни у кого нет стимула отклониться от предложенного ему варианта действия. Это означает, что матожидание выигрыша, условное по доступной игроку информации (в нашем случае по тому факту, что ему предлагают играть данную чистую стратегию), максимизируется как раз на варианте, предложенном арбитром. Обратите внимание, что игроку i известно лишь, как следует играть ему, и неизвестно, что сказал арбитр другим (если бы весь профиль стратегий был общим знанием, единственное, что можно было бы в этом случае получить — это чистые равновесия и их смеси).

Итак, коррелированные равновесия — это смеси исходов игры, удовлетворяющие условиям совместимости со стимулами. Последние представляют собой систему линейных неравенств, поэтому множество всех смешанных исходов, являющихся коррелированными равновесиями, есть выпуклый многогранник (ограниченный, поскольку содержится в симплексе, и непустой, поскольку, как нетрудно проверить, содержит все равновесия Нэша). Обозначим этот многогранник C.

Часто интерес представляют не столько сами коррелированные равновесия, сколько реализуемые в них выигрыши. В связи с этим рассматривают так называемую *область коррелированных равновесий* — множество профилей выигрышей, достижимых в коррелированных равновесиях или, что то же самое, образ $U(C)$ многогранника C при линейном отображении $U : \Delta(S_1 \times \ldots \times S_n) \to \mathbf{R}^n$, сопоставляющем смеси профилей стратегий соответствующий набор выигрышей. Поскольку при линейном отображении многогранник переходит в многогранник, вершины которого есть образы некоторых вершин исходного многогранника, то для определения области коррелированных равновесий достаточно найти все вершины многогранника C, вычислить их образы при отображении U и взять выпуклую оболочку полученного множества точек.

Рассмотрим следующий пример: требуется изобразить на плоскости (u_1, u_2) область коррелированных равновесий для игры двух лиц с таблицей выигрышей:

	t_1	t_2
s_1	$3,3$	$1,4$
s_2	$4,1$	$0,0$

Рассмотрим смешанный профиль выигрышей $a\,(s_1,t_1) + b\,(s_1,t_2) + c\,(s_2,t_1) + d\,(s_2,t_2)$, где $a+b+c+d=1$ и $a,b,c,d \geq 0$. Нужно найти условия на числа a,b,c,d, дающие коррелированные равновесия.

Найдем условие неотклонения первого игрока от стратегии s_1 в случае, если последняя рекомендована ему арбитром. Игроку 1 известно, что должен играться один из исходов (s_1,t_1) или (s_1,t_2) (т. е. что игроку 2 рекомендовано играть t_1 или t_2) с условными вероятностями, соответственно, $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{a+b}$. Если играть s_1, то ожидаемая полезность составит $(3\cdot a+1\cdot b)/(a+b)$, а если играть s_2, то с теми же самыми условными вероятностями $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{a+b}$ реализуется исход, соответственно, (s_2,t_1) или (s_2,t_2), поэтому ожидаемая полезность составит $(4\cdot a+0\cdot b)/(a+b)$. Сравнивая, получаем, что отклоняться от s_1 невыгодно, если $a \leq b$. Аналогично можно вывести условия совместимости со стимулами для s_2, t_1 и t_2. Получается система условий

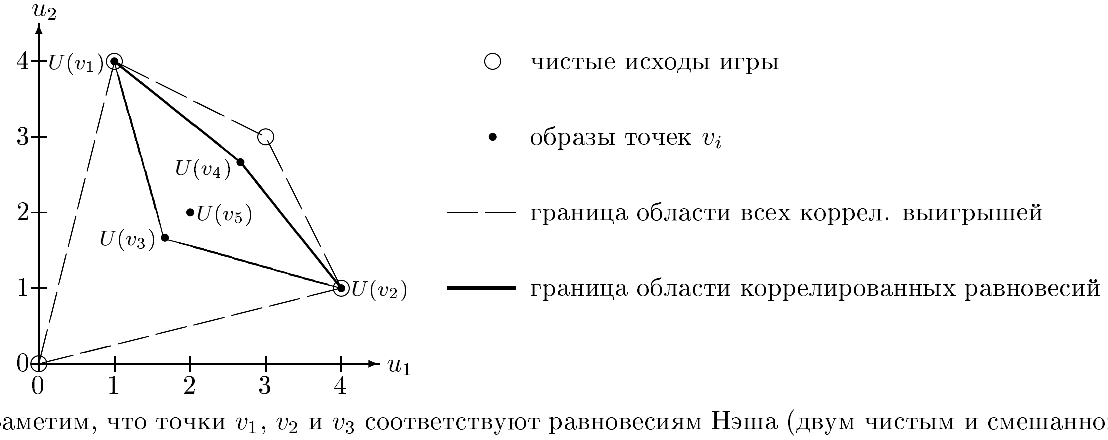
$$\begin{cases} a \leq b \\ c \geq d \\ a \leq c \\ b \geq d \\ a+b+c+d=1 \\ a,b,c,d \geq 0, \end{cases}$$

которая и определяет множество C.

Дальше надо найти все вершины многогранника C (вам известно, как это делается?). Их оказывается пять. Чтобы получить область коррелированных равновесий, надо применить ко всем вершинам отображение U, т. е. вычислить для них профили выигрышей:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (0,1,0,0)\,, & U(v_1) &= (1,4)\,,\\
v_2 &= (0,0,1,0)\,, & U(v_2) &= (4,1)\,,\\
v_3 &= \left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), & U(v_3) &= \left(\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right),\\
v_4 &= \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right), & U(v_4) &= \left(\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right),\\
v_5 &= \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right), & U(v_5) &= (2,2)\,.
\end{aligned}$$

Берем выпуклую оболочку получившихся точек на плоскости (u_1,u_2). Это и есть область коррелированных равновесий.



Заметим, что точки v_1, v_2 и v_3 соответствуют равновесиям Нэша (двум чистым и смешанному). Но область коррелированных равновесий включает не только выпуклые комбинации равновесных выигрышей, а еще и некоторые точки с бо́льшими выигрышами. Например, точка v_4 (предписывается с равными вероятностями играть профили (s_1,t_1), (s_1,t_2) и (s_2,t_1)) дает ожидаемые выигрыши $\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$, недостижимые комбинированием равновесий Нэша. Можно сказать, что Парето-граница области коррелированных равновесий задает предел возможностей кооперации с помощью необязывающих соглашений в данной игре.