РОССИЙСКАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА
NEW ECONOMIC SCHOOL

7 (9) *Проблемы общего знания*

Теория игр, 2005/6 учебный год // Андрей Бремзен, Константин Сонин, *Российская экономическая школа/ЦЭФИР, www.nes.ru/~ksonin/games06.htm*

План на сегодня

- Снова чумазые девушки
- Игры, в которых большое значение имеют веры высоких порядков
- Иерархия вер, модель Мертенса-Замира

- Ответы на вопросы, связанные с частью экзамена за 3ий модуль

Подход Мертенса-Замира

Исходные данные

$$N, (S_i)_{i\in N}, (w_i)_{i\in N}$$

$$S = \times_{i\in N} S_i$$

$$\Theta \subset \mathrm{R}^{S\times N}$$

$$w_i : S\times\Theta \to \mathrm{R}$$

$$B_i^1 = \Delta(\Theta)$$

Веры

$$B_i^1 = \Delta(\Theta)$$
$$B_i^2 = \Delta\left(\Theta \times \left(\times_{j\in N\setminus i} B_j^1\right)\right)$$

$\forall \beta_i^2 \in B_i^2$ можно определить $\varphi_i^2(\beta_i^2) \in B_i^1$:

$$\varphi_i^2(\beta_i^2)(\Psi) = \beta_i^2\left(\Psi \times \left(\times_{j\in N\setminus i} B_j^1\right)\right), \quad \Psi \subset_B \Theta$$

$$B_i^k = \Delta\left(\Theta \times \left(\times_{j\in N\setminus i} B_i^{k-1}\right)\right)$$
$$\phi_i^{k-1} : B_i^k \to B_i^{k-1}$$
$$\varphi_i^{k-1}(\beta_i^{k-1})(\Psi) = \beta_i^k\left(\left\{\left(\theta, (\beta_j^{k-1})_{j\in N\setminus i}\right) \middle| \left(\theta, \phi_i^{k-2}(\beta_j^{k-1})_{j\in N\setminus i}\right) \in \Psi\right\}\right),$$
$$\Psi \subset_B \Theta \times \left(\times_{j\in N\setminus i} B_j^{k-2}\right)$$

Универсальное пространство вер

$$B_i^\infty = \left\{\beta_i = (\beta_i^1, \beta_i^2, \ldots) \in \times_{k=1}^\infty B_i^k \,\middle|\, \beta_i^{k-1} = \phi_i^{k-1}(\beta_i^k),\ k \ge 2\right\}$$

$\forall \beta_i \in B_i^\infty, \quad q_i(\cdot|\beta_i)$ - распределение на $\Theta \times \left(\times_{j\in N\setminus i} B_j^\infty\right)$

$(Mertens, Zamir)$:

$$q_i(\cdot|\beta_i) : B_i^\infty \xrightarrow{\text{hom}} \Delta\left(\Theta \times \left(\times_{j\in N\setminus i} B_j^\infty\right)\right)$$

Байесовская игра

$$B_i^\infty = \left\{\beta_i = (\beta_i^1, \beta_i^2, \ldots) \in \times_{k=1}^\infty B_i^k \,\middle|\, \beta_i^{k-1} = \phi_i^{k-1}(\beta_i^k),\ k \ge 2\right\}$$
$$\forall \beta_i \in B_i^\infty \ \Rightarrow\ q_i(\cdot|\beta_i) \Rightarrow\ p_i(\cdot|\beta_i) \in \Delta\left(\times_{j\in N\setminus i} B_j^\infty\right)$$

$\forall \beta \in \times_{j\in N} B_j^\infty \quad \bar{q}_i(\cdot|\beta)$ - условное распределение на $\Theta \times \left(\times_{j\in N\setminus i} B_j^\infty\right.$

$$u_i(s,\beta) = \int_{\theta\in\Theta} w_i(s,\theta)\bar{q}_i(d\theta|\beta)$$

$$\boxed{\Gamma^b = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (B_i^\infty)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)}$$

Проблемы общего знания

Алиса и Боб

- Алиса и Боб получают по конверту с долларами
- Каждый знает, сколько долларов у него, но не знает, сколько у другого
- Однако оба знают, что
  - у Алисы – нечётное количество долларов
  - у Боба – чётное количество долларов
  - в одном из конвертов на 1 доллар больше
- Если их попросят сказать, кто из них богаче – на основе только того, что они сами знают, что они ответят?
- А если им объявили, что ни в одном из конвертов не находится сумма, большая или равная 1000 долларов?

Кто богаче?

- Если у Алисы – 999, то она знает
- Если Алиса молчит, а у Боба – 998, то он знает
- Если Алиса молчит и Боб молчит, а у Алисы – 997, то она знает,
- Если Алиса молчит и молчит и Боб молчит, а у него – 996, то он знает...

Информация

	0	2	4	$\cdot$	$2n$	$2n+2$	$\cdot$
1	$\otimes$	$\otimes$		$\cdot$			$\cdot$
3		$\otimes$	$\otimes$	$\cdot$			$\cdot$
5			$\otimes$	$\cdot$			$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$2n+1$				$\cdot$	$\otimes$	$\otimes$	$\cdot$
$2n+3$				$\cdot$		$\otimes$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Субьективные вероятности

- Пусть вероятность того, что в меньшем конверте – N долларов равна $p(1-p)^N$

	0	2	4	$\cdot$	$2n$	$2n+2$	$\cdot$
1	p	$p(1-p)$	0	$\cdot$	0	0	$\cdot$
3	0	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	$\cdot$	0	0	$\cdot$
5	0	0	$p(1-p)^4$	$\cdot$	0	0	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$2n+1$	0	0	0	$\cdot$	$p(1-p)^{2n}$	$p(1-p)^{2n+1}$	$\cdot$
$2n+3$	0	0	0	$\cdot$	0	$p(1-p)^{2n+2}$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Какова вероятность, что Алиса богаче?

- С точки зрения Алисы вероятность того, что она богаче равна ***1/(2-p)***
- С точки зрения Боба вероятность того, что Алиса богаче равна ***(1-p)/(2-p)***
  - если у Боба ≥2 долларов (иначе он знает точно, что Алиса богаче)

	0	2	4	$\cdot$	$2n$	$2n+2$	$\cdot$
1	p	$p(1-p)$	0	$\cdot$	0	0	$\cdot$
3	0	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	$\cdot$	0	0	$\cdot$
5	0	0	$p(1-p)^4$	$\cdot$	0	0	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$2n+1$	0	0	0	$\cdot$	$p(1-p)^{2n}$	$p(1-p)^{2n+1}$	$\cdot$
$2n+3$	0	0	0	$\cdot$	0	$p(1-p)^{2n+2}$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Знание не помогает

- Допустим, у Боба – ***2N***, а у Алисы – ***2N+1***
- Даже если Алиса и Боб знают, какие у них апостериорные веры и знают, что они знают, какие у них апостериорные веры, и...

  ... это не помогает им узнать, кто из них богаче

	0	2	4	$\cdot$	$2n$	$2n+2$	$\cdot$
1	p	$p(1-p)$	0	$\cdot$	0	0	$\cdot$
3	0	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	$\cdot$	0	0	$\cdot$
5	0	0	$p(1-p)^4$	$\cdot$	0	0	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$2n+1$	0	0	0	$\cdot$	$p(1-p)^{2n}$	$p(1-p)^{2n+1}$	$\cdot$
$2n+3$	0	0	0	$\cdot$	0	$p(1-p)^{2n+2}$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Координация

- Алиса и Боб хотели бы вместе инвестировать в один проект
  - только если и партнёр инвестирует
  - только если есть на это деньги
- Общее знание состоит в том, что у Алисы есть деньги, но Алиса не знает, если ли деньги у Боба
- Обмен информацией
  - Боб, если у него есть деньги, может послать электронное письмо Алисе, но оно может потеряться
  - Алиса может, если получит письмо, послать подтверждение, но оно может потеряться
  - Боб может послать подтверждение, но оно...

Проблемы координации

- Типы Алисы
  - 1, если она не получала сообщения
  - 3, если получила, послала в ответ, но не получила подтверждения
  - ...
- Типы Боба
  - 0, нет денег, не посылал сообщений
  - 2, деньги есть, послал, не получил ответа
  - ...
- Могут ли они как-то скоординироваться?

Не могут скоординироваться

- Пусть N_A, N_B – минимальные типы, которые инвестируют
  - только если и партнёр инвестирует
  - только если есть на это деньги
- $N_B \geq 2$
- $N_A \geq N_B + 1$
- $N_B \geq N_A + 1$

- *Если координация требует общего знания, а его не было изначально, то, сколько бы мы не обменивались информацией по несовершенным каналам, ничего не поможет*

The Electronic Mail Game

- Пусть ***p*** – вероятность того, что у Боба нет денег
- И пусть ***p*** – вероятность того, что сообщение пропадёт

	0	2	4	·	$2n$	$2n+2$	·
1	p	$p(1-p)$	0	·	0	0	·
3	0	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	·	0	0	·
5	0	0	$p(1-p)^4$	·	0	0	·
·	·	·	·	·	·	·	·
$2n+1$	0	0	0	·	$p(1-p)^{2n}$	$p(1-p)^{2n+1}$	·
$2n+3$	0	0	0	·	0	$p(1-p)^{2n+2}$	·
·	·	·	·	·	·	·	·

	и	*ни*
и	1,1	-2,0
ни	0,-2	0,0

Единственное равновесие

- **Не инвестировать!**
- Доказательство
  - Если Алиса типа ***1***, то вероятность того, что у Боба нет денег – ***1/(2-p)***. Поскольку ***1/(2-p)>1/2>1/3***, инвестировать невыгодно
  - Если Боб типа ***2***, то вероятность того, что Алиса типа ***1*** (и, значит, не инвестирует) – ***1/(2-p)***. Поскольку ***1/(2-p)>1/2>1/3***, Бобу инвестировать невыгодно
  - ...

	и	*ни*
и	1,1	-2,0
ни	0,-2	0,0

	0	2	4	·	$2n$	$2n+2$	·
1	p	$p(1-p)$	0	·	0	0	·
3	0	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	·	0	0	·
5	0	0	$p(1-p)^4$	·	0	0	·
·	·	·	·	·	·	·	·
$2n+1$	0	0	0	·	$p(1-p)^{2n}$	$p(1-p)^{2n+1}$	·
$2n+3$	0	0	0	·	0	$p(1-p)^{2n+2}$	·
·	·	·	·	·	·	·	·

Ariel Rubinstein, аннотация

The paper addresses a paradoxical game-theoretic example which is closely related to the coordinated attack problem. Two players have to play one of two possible coordination games. Only one of them receives information about the coordination game to be played. It is shown that the situation with "almost common knowledge" is very different from when the coordination game played is common knowledge.

Проблемы координации

Модель Морриса

- N рабочих
- Платёж рабочего i

	Все работают	*Хоть один из –i не работает*
Работать	**K**	**-c**
Не работать	**0**	**0**

- Ссылка на статью: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=237530

Синхронизация

- У каждого рабочего есть часы
  - часы ***i***-го начинают идти с запозданием $x_i \sim f(\,.\,)$ на **[0,e]**
  - $P(i$ – последний$)=1/N$
  - стратегия: $s_i: R \to \{0,1\}$
  - дисконт r_i
- Вероятность того, что все остальные работают:

$$\zeta_i(\tau_i, s_{-i}) \equiv \pi\left[\left\{x \in [0,\varepsilon]^N : s_j(\tau_i + x_i - x_j) = 1 \text{ for all } j \neq i\right\}\right]$$

Полезность *i*-го рабочего

$$\begin{aligned} u_i(s) &= \int_{t=x_i}^{\infty} \left\{ \int_{x\in[0,\varepsilon]^N} \left(k\left(\prod_{j=1}^{N} s_j(t-x_j)\right) - cs_i(t-x_i)\right) \left\{\prod_{j=1}^{N} f(x_j)\right\} dx \right\} e^{-r_i(t-x_i)} dt \\ &= \int_{\tau_i=0}^{\infty} \left\{ \int_{x\in[0,\varepsilon]^N} \left(k\left(\prod_{j=1}^{N} s_j(\tau_i+x_i-x_j)\right) - cs_i(\tau_i)\right) \left\{\prod_{j=1}^{N} f(x_j)\right\} dx \right\} e^{-r_i\tau_i} d\tau_i \\ &= \int_{\tau_i=0}^{\infty} s_i(\tau_i) \left\{ \int_{x\in[0,\varepsilon]^N} \left(k\left(\prod_{j\neq i} s_j(\tau_i+x_i-x_j)\right) - c\right) \left\{\prod_{j=1}^{N} f(x_j)\right\} dx \right\} e^{-r_i\tau_i} d\tau_i \\ &= \int_{\tau_i=0}^{\infty} s_i(\tau_i)\left(k\zeta_i(\tau_i, s_{-i}) - c\right) e^{-r_i\tau_i} d\tau_i \end{aligned}$$

- Все равновесия по Нэшу:

$$s_i(\tau_i) = \begin{cases} 1, \ if\ \zeta_i(\tau_i, s_{-i}) > \frac{c}{k} \\ 0, \ if\ \zeta_i(\tau_i, s_{-i}) < \frac{c}{k} \end{cases}$$

- Равновесия с работой существуют только, если $1/N > c/k$